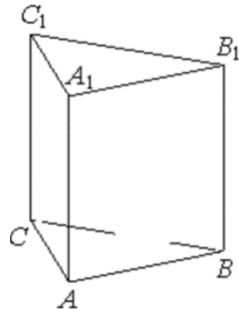


- 3 Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, C, A_1, B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Площадь основания призмы равна 9, а боковое ребро равно 4.



Ответ: _____.

- 4 На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ: _____.

- 5 Игральную кость бросили два раза. Известно, что шесть очков не выпало ни разу. Найдите при этом условии вероятность события «сумма очков равна 8».

Ответ: _____.

- 6 Найдите корень уравнения

$$\sqrt{28 - 2x} = 2.$$

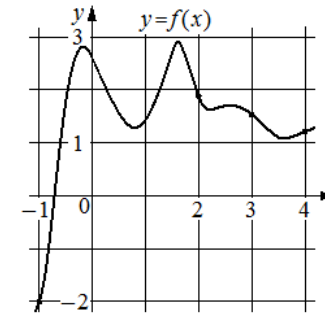
Ответ: _____.

- 7 Найдите значение выражения

$$\log_2 240 - \log_2 3,75.$$

Ответ: _____.

- 8 На рисунке изображён график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечены точки $-1, 2, 3, 4$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ: _____.

- 9 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч²). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l – пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 1,1 км, приобрести скорость 110 км/ч. Ответ дайте в км/ч².

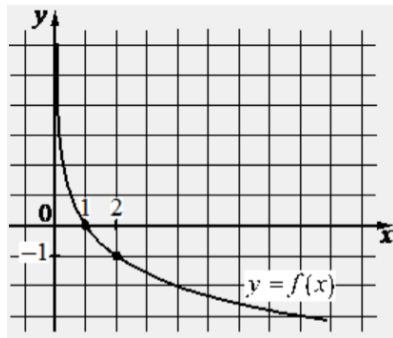
Ответ: _____.

- 10 Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 60 км, одновременно выехали мотоциклист и велосипедист. Известно, что за час мотоциклист проезжает на 50 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт B на 5 часов позже мотоциклиста. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: _____.



11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \log_a x$. Найдите значение $f(8)$.



Ответ: _____.

12 Найдите точку минимума функции $y = 9x - 9 \cdot \ln(x + 3) + 4$.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\log_7(2\cos^2 x + 3 \cos x - 1) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

14 Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 6. Точки K, L и M – центры граней $ABCD, AA_1 D_1 D$ и $CC_1 D_1 D$ соответственно.

- а) Докажите, что $B_1 KLM$ – правильная пирамида.
- б) Найдите объём $B_1 KLM$.

15 Решите неравенство

$$3^x - \frac{702}{3^x - 1} \geq 0.$$

16 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,3 млн рублей?



17 Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника ABC вторично пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке L . Прямая, проходящая через точку L и середину N гипотенузы AB , пересекает катет BC в точке M .

- а) Докажите, что $\angle BML = \angle BAC$.
б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 20$ и $CM = 3\sqrt{5}$.

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y = |2a - 4| \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

19 В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

- а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?
б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?
в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



**Система оценивания экзаменационной работы по математике
(профильный уровень)**

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ
1	40
2	3
3	12
4	0,55
5	0,12
6	12
7	6
8	-1
9	5500
10	10
11	-3
12	-2
13	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{7\pi}{3}$
14	18
15	$(-\infty; 0) \cup [3; +\infty)$
16	1 млн
17	80
18	$(4 - 2\sqrt{2}; \frac{4}{3}) \cup (4; 4 + 2\sqrt{2})$
19	а) да б) нет в) 25

**Решения и критерии оценивания выполнения заданий
с развёрнутым ответом**

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



13 а) Решите уравнение $\log_7(2\cos^2x + 3\cos x - 1) = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

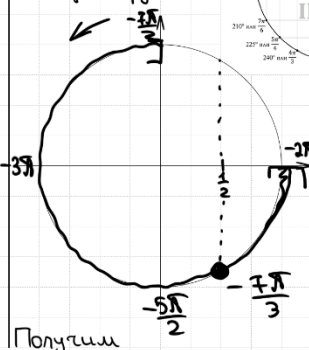


а) $2\cos^2x + 3\cos x - 1 = 1$
 $2\cos^2x + 3\cos x - 2 = 0$

Пусть $\cos x = t$
 $2t^2 + 3t - 2 = 0$

$t = \frac{1}{2}$ $t = -2$
 $\cos x = \frac{1}{2}$ $\cos x = -2$
 $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ Нет решений

б) Отберём корни с помощью окружности



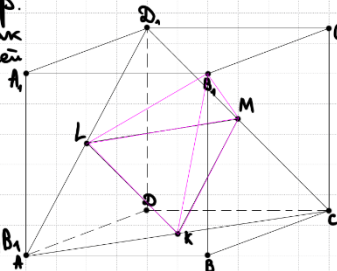
Получим
 $x = -\frac{2\pi}{1} \cdot 3 - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}$

Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{7\pi}{3}$

14 Ребро куба $ABCD_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точки K, L и M – центры граней $ABCD, AA_1D_1D$ и CC_1D_1D соответственно.
 а) Докажите, что B_1KLM – правильная пирамида.
 б) Найдите объём B_1KLM .

ИСТОЧНИКИ
 Основная волна 2017

а) ① $\triangle ACD_1$ – равносф. (т.к. $AD_1 = CD_1 = AC$ как диагонали равных граней куба)
 LM, LK, MK – ср. линии
 $LM = \frac{1}{2}AC = LK = MK$



② $\triangle AB_1D_1 = \triangle AB_1C = \triangle CD_1B_1$ по 3 сторонам
 $B_1L = B_1K = B_1M$ (как высоты в равных равност. тр-ках)
 $\Rightarrow B_1KLM$ – правильная пирамида.

б) $V_{куба} = 6^3 = 216$
 $V_{B_1KLM} = \frac{1}{4} V_{B_1ACD_1}$
 $V_{D_1ACD_1} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36$
 $V_{B_1ABC} = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36$
 $V_{D_1AA_1B_1} = 36$
 $V_{B_1CC_1D_1} = 36$
 $V_{B_1ACD_1} = 216 - 4 \cdot 36 = 72$
 $V_{B_1KLM} = \frac{1}{4} \cdot 72 = 18$
 Ответ: 18.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



15 Решите неравенство $3^x - \frac{702}{3^x - 1} \geq 0$.

ИСТОЧНИКИ
 ГПР (старый банк)
 ГПР (новый банк)
 Основная волна 2022

Пусть $3^x = t$

$$\frac{t - 702}{t - 1} \geq 0$$

$$\frac{t^2 - t - 702}{t - 1} \geq 0$$

$-26 \leq t < 1$
 $t \geq 27$
 $-26 \leq 3^x < 1$
 $3^x < 3^0$
 $x < 0$

$3^x \geq 27$
 $3^x \geq 3^3$
 $x \geq 3$

Ответ: $(-\infty, 0) \cup [3, +\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 15 января планируется взять кредит в банке на 14 месяцев. Условия его возврата таковы:
 - 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4% по сравнению с концом предыдущего месяца;
 - со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
 - 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
 Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного погашения равнялась 1,3 млн рублей?

ИСТОЧНИКИ
 ГПР (старый банк)
 ГПР (новый банк)
 Основная волна 2019
 СтатГрад 23.09.2019
 СтатГрад 21.09.2017
 Ященко 2022 (36 вер)
 Ященко 2021 (36 вер)
 Ященко 2020 (36 вер)

Пусть S - сумма долга
 7 число - день платежа

Взплата образует арифм. прогр.
 Воспользуемся ф-той суммы арифм. прогр. $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$

О.С.В. = 1,3 млн

$$\frac{1,56 \cdot S}{14} + \frac{1,04S}{14} \cdot 14 = 1,3$$

$$1,3 \cdot S = 1,3$$

$$S = 1 \text{ млн}$$

Дата Сумма долга

15я	S
1 { 7 ф	$1,04S$
15	$\frac{13}{14}S$
2 { 7 ф	$\frac{13}{14}S \cdot 1,04 = \frac{13,52}{14}S$
15	$\frac{12}{14}S$
3 { 7 ф	$\frac{12}{14}S \cdot 1,04 = \frac{12,48}{14}S$
15	$\frac{11}{14}S$
...	...
13я	$\frac{S}{14}$
14 { 7 ф	$\frac{1,04S}{14}$
15	0

$\frac{1,04S}{14} - \frac{13S}{14} = \frac{1,56S}{14}$
 $\frac{13,52}{14}S - \frac{12,48}{14}S = \frac{1,04S}{14}$
 $\frac{1,04S}{14} = \frac{1,04S}{14}$

Ответ: 1 млн

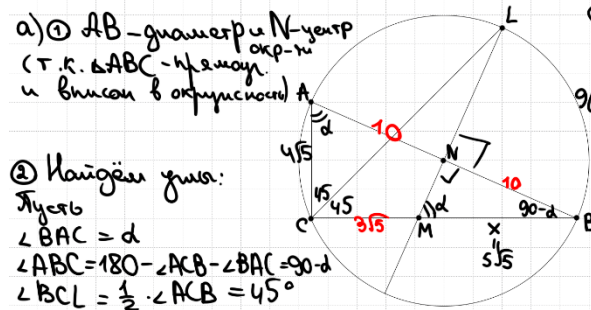
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



17 Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника ABC вторично пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке L . Прямая, проходящая через точку L и середину N гипотенузы AB , пересекает катет BC в точке M .

ИСТОЧНИКИ
Основная волна (резерв) 2020

- а) Докажите, что $\angle BML = \angle BAC$.
б) Найдите площадь треугольника ABC , если $AB = 20$ и $CM = 3\sqrt{5}$.



б) ① $\Delta BMN \sim \Delta ABC$ по 2 углам (α и 90°)
 $\frac{BM}{AB} = \frac{BN}{BC}$
 $\frac{x}{20} = \frac{10}{x+3\sqrt{5}}$
 $x^2 + 3\sqrt{5}x = 200$
 $x^2 + 3\sqrt{5}x - 200 = 0$
 $D = 45 + 800 = 845$
 $x = \frac{-3\sqrt{5} \pm \sqrt{845}}{2}$
 $x = 5\sqrt{5} = BM$
 $AC = \sqrt{20^2 - (8\sqrt{5})^2} = 4\sqrt{5}$
 $S = \frac{4\sqrt{5} \cdot 8\sqrt{5}}{2} = 80$
Ответ: 80.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y = |2a - 4| \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

ИСТОЧНИКИ
ЕГЭ (старый банк)
ЕГЭ (новый банк)
Основная волна 2018
Основная волна 2023 (16 мар)
Январь 2020 (16 мар)
Январь 2019 (16 мар)
Тренировочный вариант 2020

$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2 \\ y = |2a - 4| - x^2 \end{cases}$
 $x^4 + (|2a - 4| - x^2)^2 = a^2$
 $x^4 + 4a^2 - 16a + 16 - 2x^2 \cdot |2a - 4| + x^4 = a^2$
 $2x^4 - 2x^2 \cdot |2a - 4| + 3a^2 - 16a + 16 = 0$
Уравнение 4-ой степени может иметь до 4-х корней, если считать $t = x^2$

Пусть $x^2 = t$ $t \geq 0$, но чтобы было 4 разных реал., нужно $t_1 > 0$, $t_2 > 0$

$$2t^2 - 2|2a - 4| \cdot t + 3a^2 - 16a + 16 = 0$$

по т. Виета $t_1 + t_2 = \frac{2|2a - 4|}{2} = |2a - 4|$
 $t_1 \cdot t_2 = \frac{3a^2 - 16a + 16}{2}$

Заметим, что сумма корней t_1, t_2 неотрицательна $\Rightarrow t_1, t_2$ не могут быть оба отрицательными.

\Rightarrow Если левая часть $\frac{3a^2 - 16a + 16}{2} > 0$, то это гарантирует, что корни будут комплексными.

Чтобы было 2 различных корня, нужно, чтобы $D > 0$

Получаем
① $\frac{3a^2 - 16a + 16}{2} > 0$ | :2
② $D > 0$

① $3a^2 - 16a + 16 > 0$
 $D = 256 - 192 = 64$
 $a = \frac{16 \pm 8}{6}$
 $a = \frac{4}{3}$ или $a = 4$

② $(-2|2a - 4|)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (3a^2 - 16a + 16) > 0$
 $4 \cdot (2a - 4)^2 - 24a^2 + 128a - 128 > 0$
 $16a^2 - 64a + 64 - 24a^2 + 128a - 128 > 0$
 $-8a^2 + 64a - 64 > 0$ | :(-8)
 $a^2 - 8a + 8 < 0$
 $D_0 = 64 - 32 = 32$
 $a = \frac{8 \pm \sqrt{32}}{2}$
 $a = 4 - 2\sqrt{2}$ или $a = 4 + 2\sqrt{2}$

Найдём пересечение:
 $\frac{4}{3} < a < 4$ и $4 - 2\sqrt{2} < a < 4 + 2\sqrt{2}$
Ответ: $(4 - 2\sqrt{2}; \frac{4}{3}) \cup (4; 4 + 2\sqrt{2})$

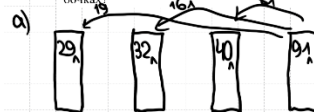


Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

ИСТОЧНИКИ
 Основная школа 2013

19 В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

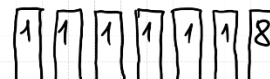
а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литр. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?
 б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?
 в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

а) 

① $91 + 40 + 32 + 29 = 48 \text{ л}$

② За 3 переливания:
 19 л из 4-ой бочки в 1-ую
 16 л в 4-ую
 8 л в 4-ую
 4 л в 4-ую
 8 л в 3-ю
 3 л в 3-ю

Ответ: а) да

б) Пусть есть 7 таких бочек:


① 2 л - это среднее кол-во литров

② В каждую из первых шести бочек нужно долить воды, т.е. для данного примера нужно ≥ 6 переливаний

Ответ: б) нет

19 В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литр. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?
 б) Пусть есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?
 в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

в) Меньше чем за 25 переливаний не получится (когда есть 25 бочек по 1 литру и 26-я 27 литров)
 Для данного примера нужно ≥ 25 переливаний
 \Rightarrow Искомое кол-во переливаний ≥ 25

② Докажем, что 25 переливаний всегда хватит
 Пусть x - сколько воды осталось в каждой бочке
 Тогда $26x$ - общий объем воды во всех 26-ти бочках

Если во всех 26 бочках сразу по x воды, то переливаний не нужно
 Если в 25 бочках сразу по x воды, то в 26-й тоже x воды + переливание не нужно
 Если в 24 бочках сразу по x воды, то нужно ≤ 1 переливание
 Если в 23 бочках сразу по x воды, то нужно ≤ 2 переливания

$$\begin{matrix} 0,9x & 0,5x & x \\ 0,6x & x & x \\ 1,5x & 1,5x & x \end{matrix} \times 0,1$$

$$\leq 3$$

$$\leq 4$$

Если в 0 бочек сразу x воды, то в оставшихся 26 ≤ 25
 (пример такой ситуации приведен в 1-м действии пункта в)
 Ответ: в) 25.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>a</i> , <i>b</i> и <i>в</i>	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> или <i>b</i>	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах <i>a</i> и <i>b</i> ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте <i>в</i>	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте <i>a</i> или <i>b</i>	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	4

В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 04.04.2023 № 233/552, зарегистрирован Минюстом России 15.05.2023 № 73314)

«81. Проверка экзаменационных работ включает в себя:

1) проверку и оценивание предметными комиссиями ответов на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом <...>, в том числе устных ответов, в соответствии с критериями оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором <...>

По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют первичные баллы за каждый ответ на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом. <...>

В случае существенного расхождения в первичных баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о первичных баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения:

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленными двумя экспертами за выполнение заданий 13–19, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 13–19 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

